

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

10 februarie 2024

Clasa a XI-a

Problema 1.

a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x+x^2) + \ln(1+x+x^2)}{x^2}$.

b) Să se scrie ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.

Problema 2.

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ să se arate că $A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, unde $\text{Tr}(A) = a + d$, iar $\det(A) = ad - bc$.

b) Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă $A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Problema 3.

a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ dacă $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & \log_2(x+1) & \log_2^2(x+1) \end{vmatrix} = 0$.

b) Fie numerele reale a, b, c cu având suma egală cu 2024. Să se determine acestea dacă $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0$.

Problema 4.

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale definit prin $a_1 > 1$ și $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are limita egală cu ∞ .

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$. (G.M.)

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p.

Timp de lucru 3 ore.